D'où $|h''(c_n)| < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$

•$\text{Log}2 < x_n < 1 \Rightarrow h'(\text{Log}2) < h'(x_n) < h'(1)$

(car $h' \nearrow$ sur $[\text{Log}2, 1]$)

$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -2e^{-\ln 2} + 2e^{-2\ln 2} - 1 < h'(x_n) < -2e^{-1} + 2e^{-2} - 1 \approx -1,46$

D'où $-3 < 2h'(x_n) < -4e^{-1} + 4e^{-2} - 2 \approx -2,92$

Par suite $\frac{1}{-4e^{-1} + 4e^{-2} - 2} < \frac{1}{2h'(x_n)} < -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{2h'(x_n)}\right| < \left|\frac{1}{-4e^{-1} + 4e^{-2} - 2}\right| = \frac{1}{4e^{-1} - 4e^{-2} + 2}.$

D'autre part $|h''(c_n)| < 2e^{-1} - 4e^{-2} \approx 0,19$

Ce qui mène a conclure que $\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < \frac{2e^{-1} - 4e^{-2}}{4e^{-1} - 4e^{-2} + 2} < 1$

c- On a $x_{n+1} - \alpha = \frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2$

Donc $|x_{n+1} - \alpha| = \left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}(x_n - \alpha)^2\right| = \left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right|(x_n - \alpha)^2$

Or $\left|\frac{h''(c_n)}{2h'(x_n)}\right| < 1$ alors $|x_{n+1} - \alpha| < (x_n - \alpha)^2$.

5) Montrons d'abord par récurrence que $|x_n - \alpha| \leq (x_0 - \alpha)^{2^n}$

▸ $|x_0 - \alpha| \leq (x_0 - \alpha)^{2^0}$ car $2^0 = 1$.

▼ Soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que $|x_p - \alpha| \leq (x_0 - \alpha)^{2^p}$; montrons que $|x_{p+1} - \alpha| \leq (x_0 - \alpha)^{2^{p+1}}$ en effet

$|x_{p+1} - \alpha| < (x_0 - \alpha)^2$ Or $(x_p - \alpha)^2 \leq \left[(x_0 - \alpha)^{2^p}\right]^2 = (x_0 - \alpha)^{2^p \cdot 2}$

D'où $|x_{p+1} - \alpha| < (x_0 - \alpha)^{2^{p+1}}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}; |x_n - \alpha| \leq (x_0 - \alpha)^{2^n} \leq (31 \times 10^{-2})^{2^n}$

car $|x_0 - \alpha| < 31.10^{-2}$

D'ou $\forall n \in \mathbb{N}; |x_n - \alpha| \leq (31 \times 10^{-2})^{2^n}$.

Donc pour avoir $|x_n - \alpha| < 10^{-5}$ il suffit d'avoir $(31 \times 10^{-2})^{2^n} < 10^{-5}$

$(31 \times 10^{-2})^{2^n} < 10^{-5} \Leftrightarrow \ln\left[(31 \times 10^{-2})^{2^n}\right] < \ln[10^{-5}]$

$\Leftrightarrow 2^n \ln[31 \times 10^{-2}] < \ln[10^{-5}]$

$\Leftrightarrow 2^n > \frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]}$ car $(31 \times 10^{-2}) \in]0, 1[$

$\Leftrightarrow \ln(2^n) > \ln\left(\frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]}\right) \Leftrightarrow n\text{Log}2 > \ln\left(\frac{\ln[10^{-5}]}{\ln[31 \times 10^{-2}]}\right)$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\left(\frac{\ln[10^{-5}]}{\ln(31 \times 10^{-2})}\right)}{\ln 2} \approx 3,297$

Conclusion il suffit de prendre $n_0 = 4$ pour avoir

$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - \alpha| < 10^{-5}$.